Gestão de Inventários

Introdução

Definição de inventário (ou stock)

Acumulação de matérias-primas, produtos semi-acabados e/ou produtos acabados, bem como de sobressalentes necessários à manutenção, num sistema produtivo.

- Em geral, os inventários correspondem a um investimento muito significativo das organizações;

- Este *"empate"* de capital tem motivado uma tendência que aponta no sentido da racionalização dos inventários.

Perspectiva logística

O inventário funciona como um fio condutor entre o fornecedor de matérias-primas e o cliente final:

Fornecedor → Fabricante → Distribuidor → Retalhista → Cliente
(cadeia logística simples)

A gestão de inventários, uma das funções da logística, deve ser vista numa *perspectiva integradora* de gestão eficiente da cadeia como um todo (*ex, "Supply Chain Management" – "SCM"*).

Filosofias de gestão da *cadeia logística*:

- Clássica *"push"*: a movimentação dos inventários é desencadeada pelo fabricante;

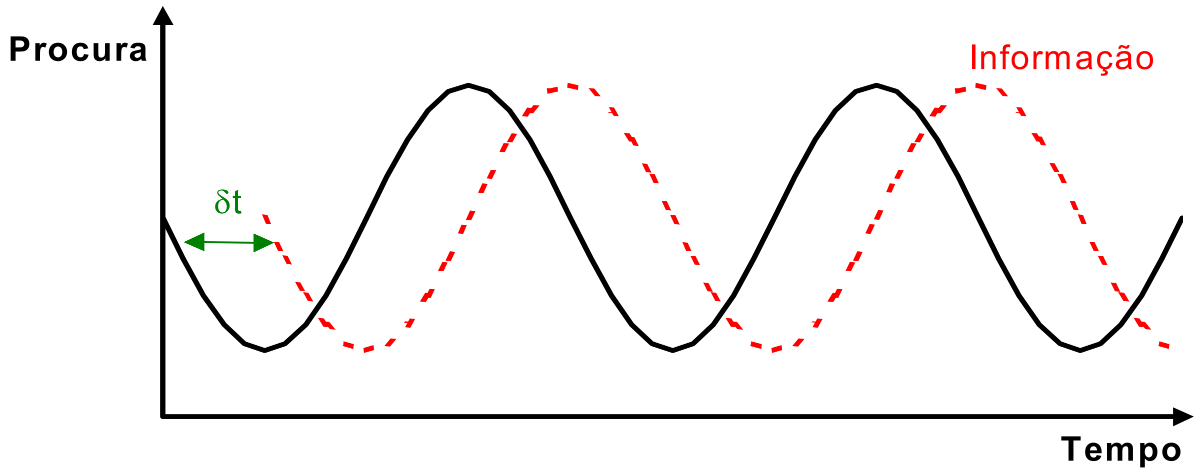
- Mais recente *"pull"*: a movimentação é desencadeada pelo cliente final. Normalmente, permite redução nos inventários, tempos de produção e distribuição. Contudo, exige ágeis sistemas de gestão baseados em *sistemas de informação* (*ex, EDI – "Electronic Data Interchange"*), abrangendo toda a cadeia.

Funções dos inventários (1)

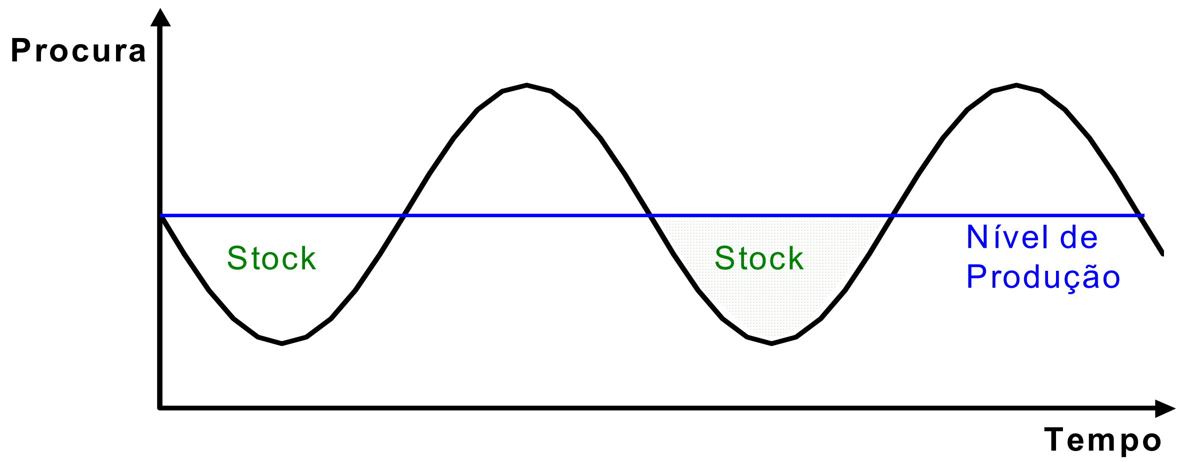
A existência de inventários pode ser justificada com base nas funções seguintes:

<u>a) Ajustamento à procura</u>

- A informação relativa à procura (aleatória) é recebida com atraso; (recorre-se a previsões!)



- O inventário funciona então como um "acumulador", permitindo estabilizar o nível de produção:



Funções dos inventários (2)

b) <u>Cumprimento dos *“prazos de entrega”*</u>

- Com armazenagem de semi-acabados, se possível. Porquê?

c) <u>Desacoplamento de funções na empresa</u>

- No Aprovisionamento, a empresa poderá obter um *“desconto de quantidade”* na compra;

- O Departamento de Produção poderá pretender fazer uma *“optimização”* do processo;

- O Departamento de Vendas poderá pretende fazer uma *“optimização”* da distribuição.

d) <u>Incerteza (na procura e/ou no prazo de entrega)</u>

- Permite obviar a situações daí recorrentes: *ex,* uma greve afectando o fornecimento de matérias-primas.

Funções dos inventários (3)

e) Controlo do produto

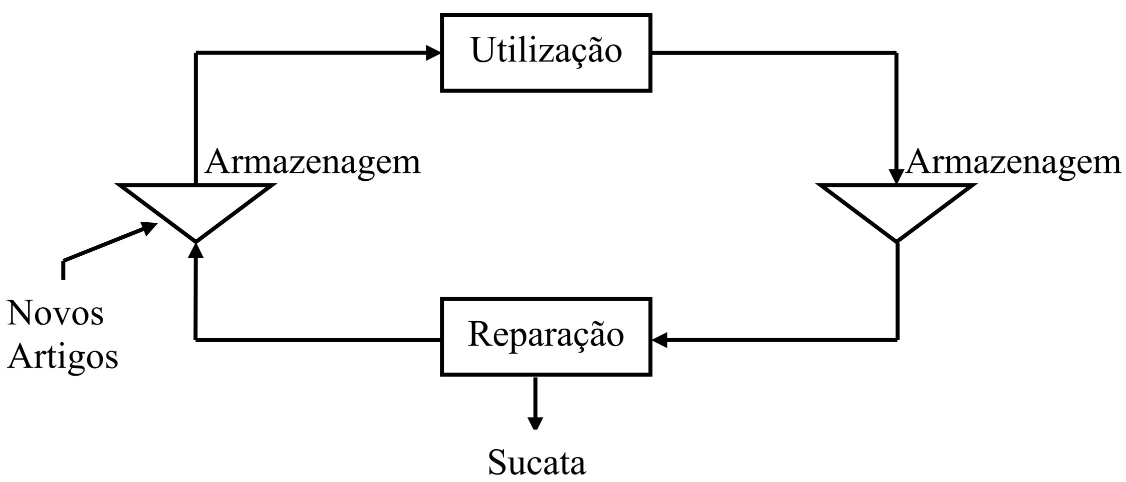
- Permite garantir um determinado nível de qualidade (*ex*, manter uísque de qualidade superior para misturar com *"standard"* afim de obter o produto comercializado).

f) Especulação

- Comprar em situações de baixa de preços para venda em situações de alta ⇒ (Alto risco !!!)

g) Funcionamento do processo e do produto

- Armazenagem de sobressalentes, com taxas de consumo mais baixas; *ex,* rotativos:



Propriedades dos inventários (1)

a) Esquema uniforme de identificação / referenciação

- Por numeração ou código;
- Deve conter uma descrição do artigo, incluíndo a sua natureza física, vida útil, e outras propriedades relevantes;
- Valor do artigo e número de unidades existentes, actualizados.

b) Classificação

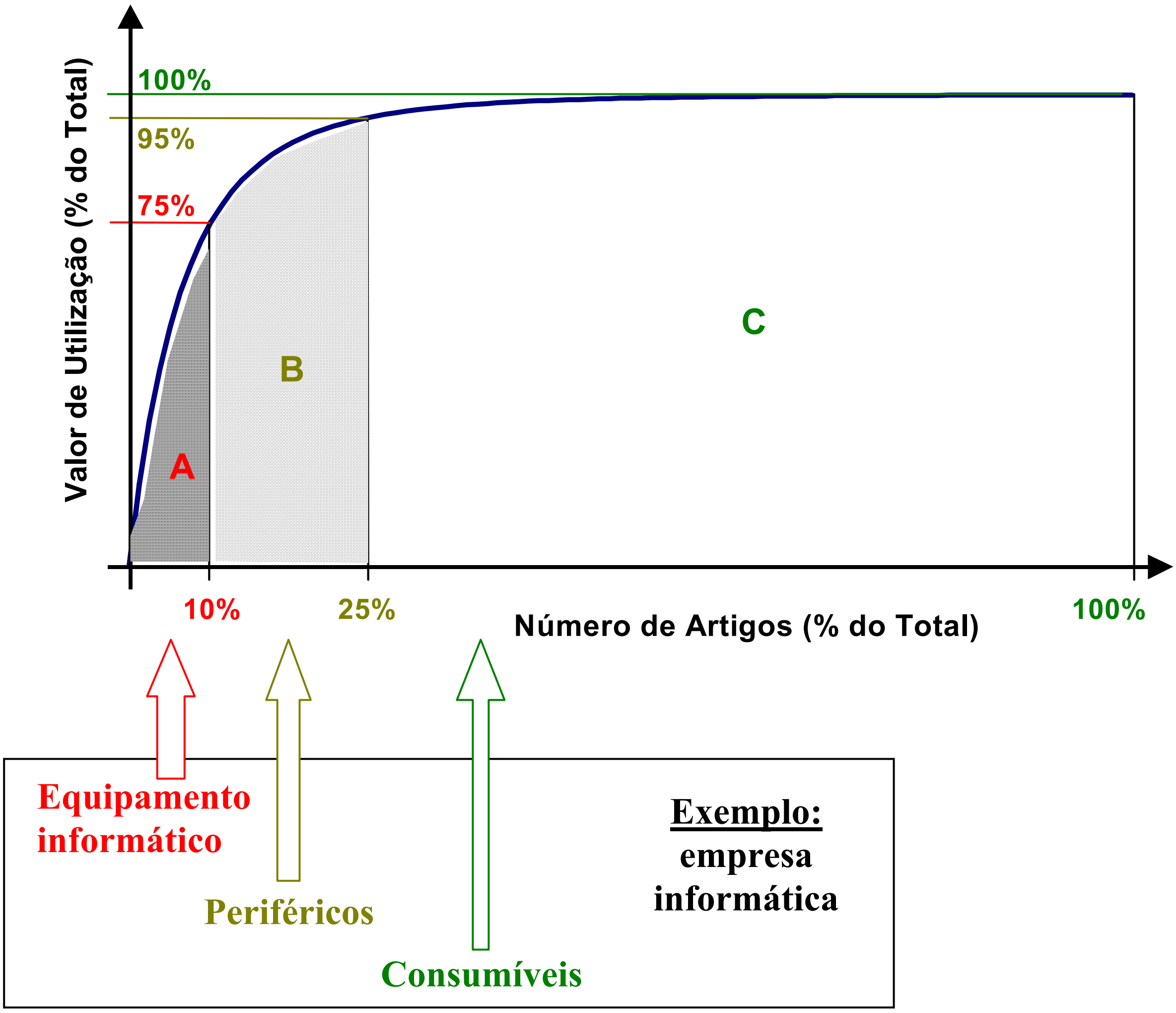
Os artigos devem ser classificados quanto à sua importância relativa. As diferenciações mais comuns incluem:

- *"Taxa de utilização"*: nº unidades / u. tempo;
- *"Velocidade de rotação"*: nº vezes que é renovado /u. tempo;

Exemplo: taxa de utilização = 2000 /ano, e
inventário médio = 200
⇔ "*rotação de 10*"

Propriedades dos inventários (2) – classificação...

- *"Valor de utilização"*: utilização anual × valor unitário; (Análise ABC ou de Pareto)



- *"Prazo de entrega"*: intervalo de tempo entre o instante "*ordem de encomenda"*, e o instante de reaprovisionamento;

- *Factor crítico*: quão crítico para o funcionamento do sistema? *Ex*, classificação de "*fundamental*".

Propriedades dos inventários (3)

c) Caracterização da procura

- Natureza contínua ("*taxa de procura*");

  ou

- Natureza discreta ("ocasiões"; *"errática"*?).

...

- Determinística (*ex*, aproximadamente constante ou *"nível"*);

  ou

- Probabilística ou estocástica (e que tipo de aleatoriedade?)

d) Reaprovisionamento

Caracterizado por:

- Período de revisão;
- Período de reaprovisionamento;
- Volume de encomenda;
- Prazo de entrega;
- Origem do fornecimento.

Classificação dos modelos de gestão de inventários

De acordo com as características do prazo de entrega e da procura:

a) <u>Modelos *determinísticos*</u>

- Prazo de entrega e *procura* aproximadamente constantes;
- Modelos simples com bastante aplicação;
- *Ex,* Quantidade Económica de Encomenda *(QEE)*.

b) <u>Modelos *estocásticos* ou *probabilísticos*</u>

- Prazo de entrega e/ou procura apresentam variabilidade aleatória significativa;
- Necessário criar um *"stock de segurança"*, como amortecedor da variabilidade;
- Quanto maior o stock de segurança, menor o *risco de "ruptura"* (ou *"quebra"*), mas maior o investimento;
- *Ex(s),Políticas Nível de Encomenda* e *Ciclo de Encomenda*.

c) <u>Modelos para *procura dependente*</u>

- Normalmente, em situações de stocks hierárquicos e procura irregular;
- *Ex,* qdo a procura depende do plano de produção adoptado;
- *Ex,* no contexto do sistema de gestão *"Material Requirements Planning" (MRP)*, ou no sistema *"Just in Time"* (modelos *"pull"*).

Objectivos e restrições dos modelos

Objectivos:

Genericamente, pretende-se determinar os parâmetros:

- *Quando* devem as encomendas ser colocadas (lançadas) ?
- *Quanto* encomendar de cada vez ?

… de forma a *minimizar os custos* de gestão do inventário (objectivo clássico), ou a *garantir um "nível de serviço"* pretendido.

Constrangimentos ou restrições:

Exemplo de restrições comuns que restringem a simples adopção do critério de MINIMIZAÇÃO da função "*Custo_Variável_Total*":

- Limitação de capital;
- Limitação do espaço de armazenagem;
- Limitação do número de encomendas/u. tempo;
- Limitação do tempo de preparação;
- etc…

Custos de funcionamento do sistema de gestão...

<u>(...Nível de inventário: factores positivos)</u>

Se o objectivo (dos modelos) é a minimização do custo variável total, é do balanceamento dos diversos componentes da função custo que vai depender a decisão de se manter níveis de inventário mais altos ou mais baixos.

Por exemplo, poder-se-á argumentar que interessa:

<u>*"...manter inventários tão grandes quanto possível…"*</u>

para se conseguir:

…No aprovisionamento (de matérias-primas):

- Descontos de quantidade;
- Redução do nº ($\therefore$custos) de reaprovisionamento.

…No lançamento de lotes de produção:

- Redução dos custos de movimentação.

…Na distribuição (dos produtos):

- Obtenção de economias de escala.

Custos de funcionamento do sistema de gestão...

(...Nível de inventário: factores negativos)

No outro extremo porém, poder-se-á achar que interessa:

“...manter inventários tão pequenos quanto possível…”

porque geralmente o inventário:

... representa capital imobilizado (custos de oportunidade);

... requer espaço de armazenagem;

... representa um valor que exije seguros;

... requer operações de conservação (custos de conservação e também, muitas vezes, deterioração);

... está sujeito a obsolescência (*ex*, material informático de rápida evolução tecnológica).

...Custo de existência ou de posse de inventário (C_1)

- $C_1 = i \times b$ (% do valor do artigo)

  i = taxa de juro (interna) de existência

  b = valor unitário do artigo

- [*U.M. / artigo / u. tempo*]

- <u>*Exemplo*</u>: Capital………………………………. 15%

  Espaço……………………………….. 7%

  Perdas (seguro, deterioração)…..... 5%

  Controlo (movimentos, registos).... 3%

  TOTAL = i = 30%

<u>*...Valor unitário ou custo de aquisição do artigo (b)*</u>

- Se for variável (*ex*, no caso de existirem *“descontos de quantidade”*), este custo deverá constituir uma parcela independente da função “custo total” (custo de aquisição + custo de operação), a qual passará a ser o objecto da minimização.

...Custo de quebra, penúria ou ruptura (C_2)

…Em situações em que a procura não pode ser satisfeita por falta de inventário:

(1) Situação de *"encomenda em atraso"* ou de *"encomenda em carteira"*:

- O cliente está disposto a aguardar...
- Custos pela alteração do planeamento;
- [*U.M. / artigo / u. tempo*].

(2) Situação de *"venda perdida"*:

- O cliente não está disposto a esperar!
- [*U.M. / artigo*].

…*Nível de Serviço* intimamente ligado ao *Custo de Quebra*;

…*Custo de Quebra* é frequentemente de difícil e subjectiva avaliação.

...*Custo de passagem de encomenda* (C_3)

- Custo associado a todos os serviços e trâmites do processo de lançamento da encomenda, como sejam:

…a preparação de documentação (*ex*, facturas, guias de remessa);

…a actualização de bases de dados;

…a movimentação de inventário;

...etc...

- [*U.M. / encomenda*]

Gestão de Inventários

Modelos determinísticos (tradicionais)

Considerações gerais

- Procura e prazo de entrega determinísticos;
- Taxa de procura (*r*) constante;
- Pedidos de reaprovisionamento com antecedência.

Modelos:

- *Modelo* (C_1, C_3), *QEE*, ou *Nível de Encomenda*;
- *Modelo* (C_1, C_2), ou *Ciclo de Encomenda*;
- *Modelo* (C_1, C_2, C_3).

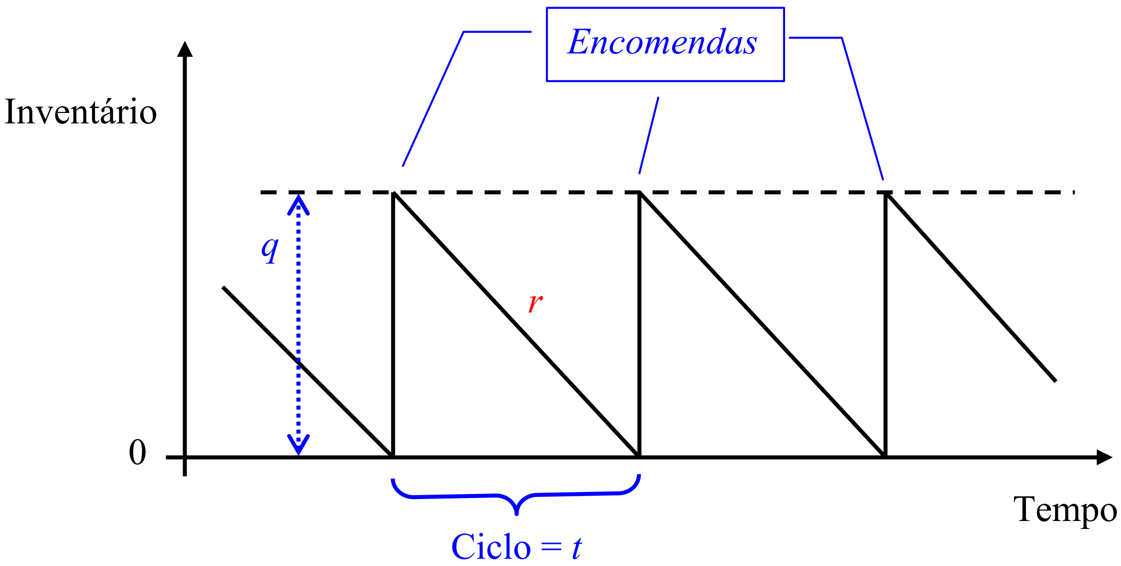
Sistema (C_1, C_3): Introdução

"Modelo de Quantidade Económica de Encomenda" ou

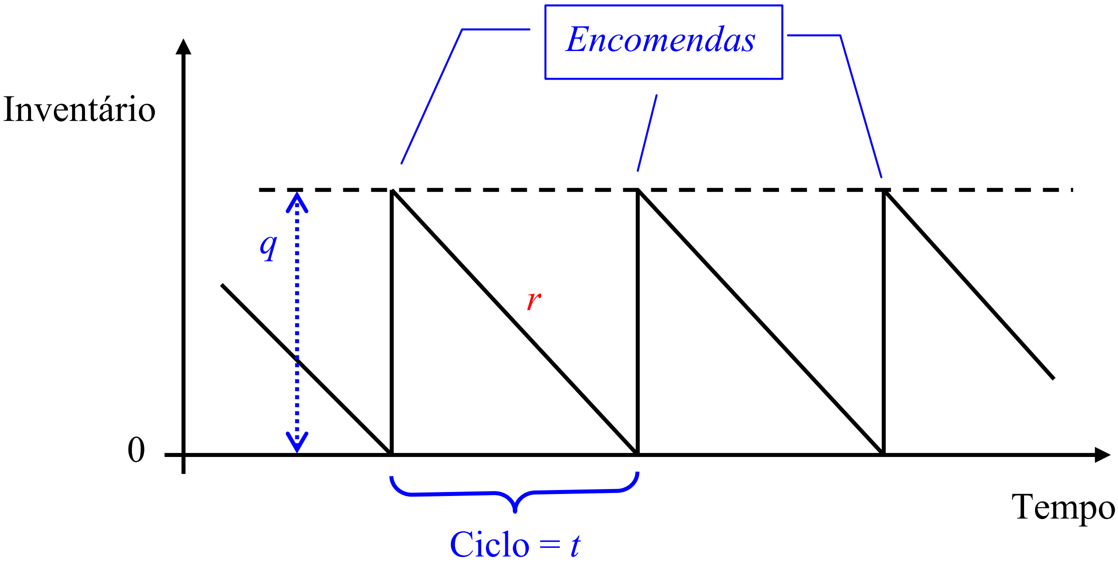
"Modelo de Nível de Encomenda"

Pressupostos:

- Não é permitida qualquer ruptura de inventário;
- Em todos os ciclos é encomendada a mesma quantidade (q);
- Taxa de reaprovisionamento infinita (*i.e.* instantânea); e
- Prazo de entrega nulo ($l = 0$).



Sistema (C_1, C_3): Função objectivo



- Nível médio de inventário = $\dfrac{q}{2}$
- Número de encomendas por u. tempo = $n = \dfrac{r}{q}$
- Período de reaprovisionamento = $t = \dfrac{1}{n} = \dfrac{q}{r}$

$\therefore$ Custo total variável de operação (*a minimizar!*):

$$C = C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}$$

(Custo de existência + Custo de passagem de encomenda)

Sistema (C_1, C_3): Quantidade económica (*QEE*, q^*)

A partir da derivação da função custo!

$$\boxed{C = C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}}$$

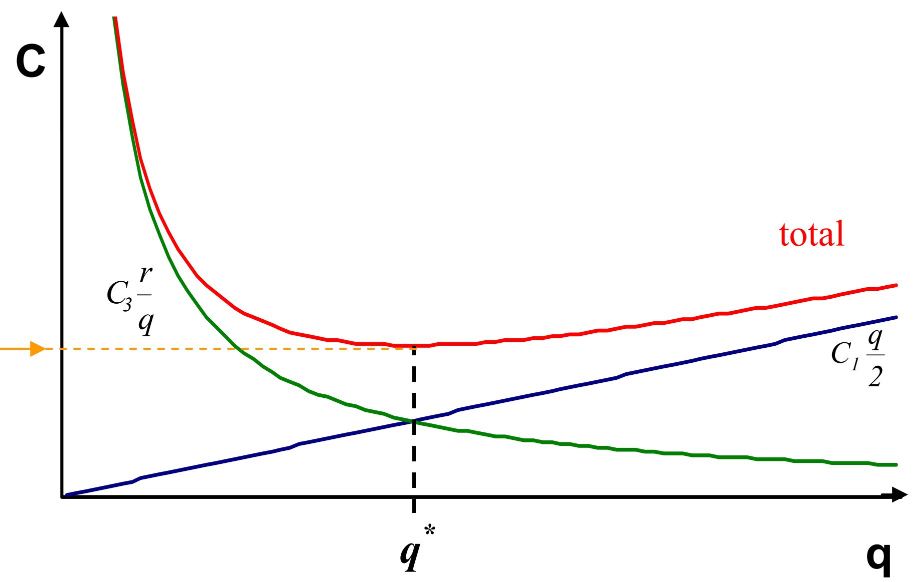
$$\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{2} - C_3 \frac{r}{q^2} = 0$$

$$\boxed{QEE = q^* = \sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}}$$

$$C^* = \sqrt{\frac{rC_1C_3}{2}} + \sqrt{\frac{rC_1C_3}{2}}$$

(NB: Custo existência = Custo passagem encomenda)

$$\boxed{C^* = \sqrt{2rC_1C_3}}$$



Sistema (C_1, C_3): Efeito da inflação

Taxa de juro = i % *(ex, 10%)*

Taxa de inflação = I % *(ex, 15%)*

Taxa de juro líquida = $\left[\dfrac{(1+I)}{1+i} - 1\right]$ *($\Leftrightarrow$ ex, 4.5%)*

---

i.e. Taxa de juro efectiva $\Downarrow$

Custo de existência (C_1) $\Downarrow$

$\therefore$ Mínimo do custo variável total de operação corresponde a um nível de inventário (q^*) maior.

i.e. O capital imobilizado "vale menos"!

Sistema (C_1, C_3): Análise de sensibilidade

Referência: $(QEE = q^* = \sqrt{\dfrac{2rC_3}{C_1}}) \Leftrightarrow (C^* = \sqrt{2rC_1C_3})$

Em análise:

Uma nova quantidade de encomenda = $(q^e = \alpha \cdot q^*)$

Substituíndo na expressão geral do custo, $C = C_1\dfrac{q}{2} + C_3\dfrac{r}{q}$, e tomando a razão dos custos, resulta:

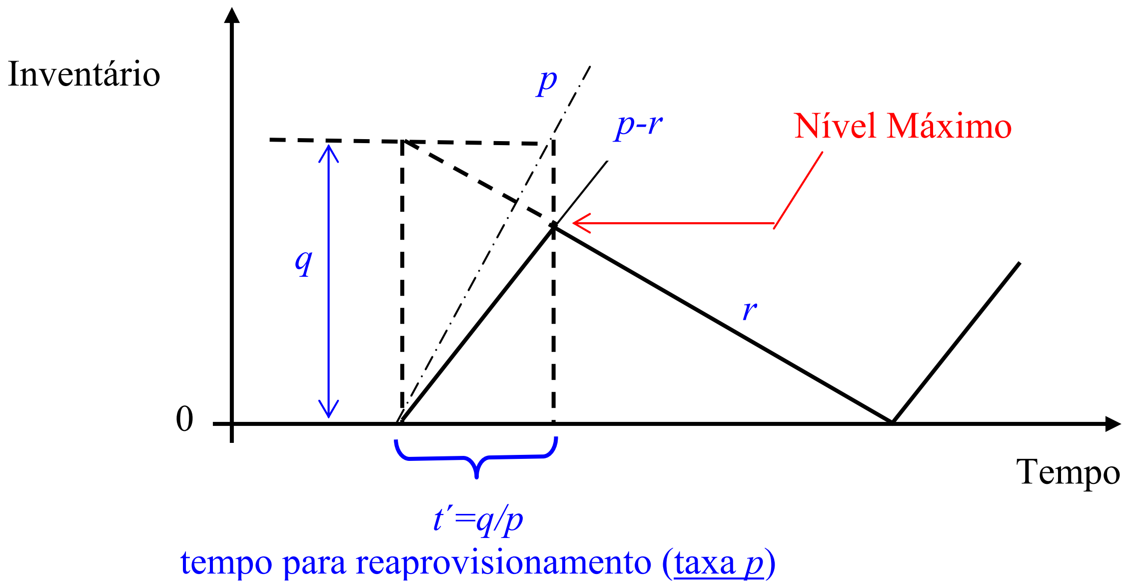
$$\frac{C^e}{C^*} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$$

Exemplo:

α	0.80	1.00	1.20
C^e/C^*	1.025	1.000	1.017

$\therefore$ Pouca sensibilidade do custo para pequenas variações da *QEE*! Isto permite ajustar a frequência do reabastecimento, aumentando ou diminuindo *QEE* para um valor mais conveniente.

Sistema (C_1, C_3): Taxa de reaprovisionamento finita



- O inventário cresce a uma taxa (*p-r*), sendo *p>r !*
- Nível máximo = $t'(p-r) = q\left(1-\frac{r}{p}\right)$
- Nível médio = $\frac{q}{2}\left(1-\frac{r}{p}\right)$

∴ Quantidade Óptima de Encomenda = $\sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1(1-\frac{r}{p})}}$

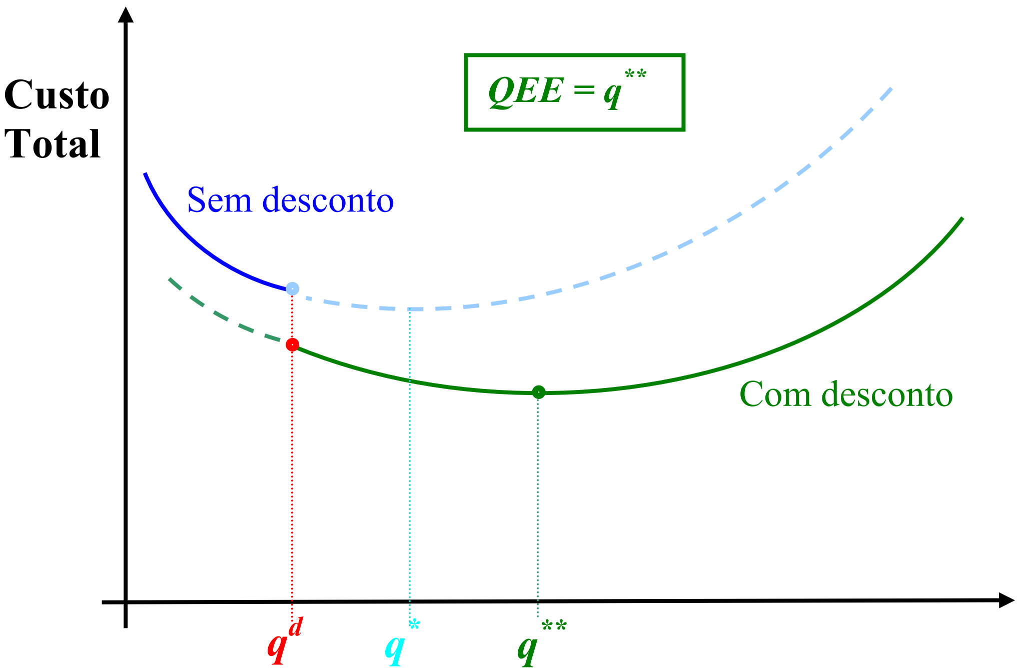
N.B. (1): $p \to \infty$, a expressão para *QEE* vem simplificada...

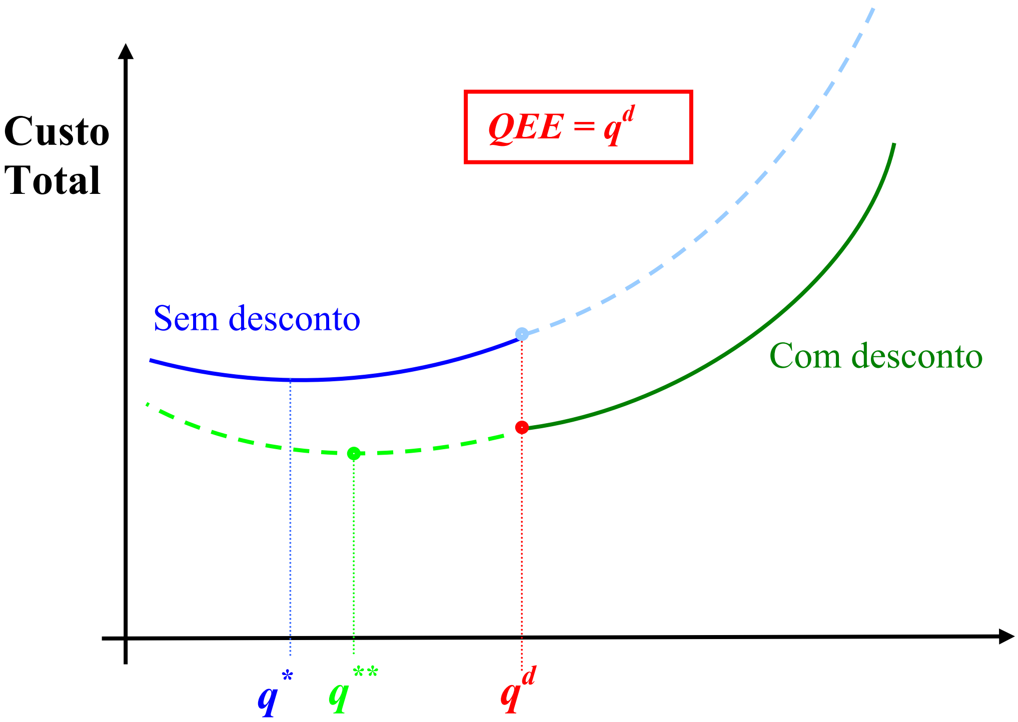
N.B. (2): Taxa de reaprovisionamento finita é mais vantajosa; ideal seria *p=r*, *i.e.* ter um nível médio de stock nulo!

Sistema (C_1, C_3): Descontos de quantidade

$$C = br + C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}$$

Várias situações são possíveis, por exemplo:



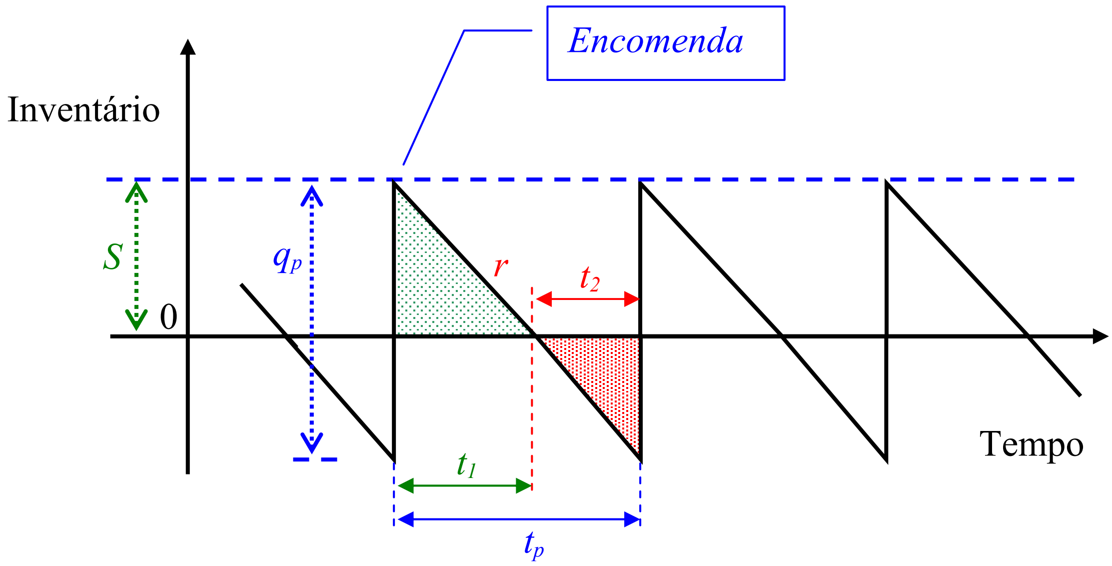


Sistema (C_1, C_2): Introdução

"*Sistema Ciclo de Encomenda*"

Pressupostos:

- Custo de passagem de encomenda desprezado;
- Período de reaprovisionamento fixo (t_p);
- Encomenda = $q_p = rt_p$ (procura = r = constante);
- Prazo de entrega nulo;
- São permitidas *"quebras" (ou "rupturas") de inventário*!



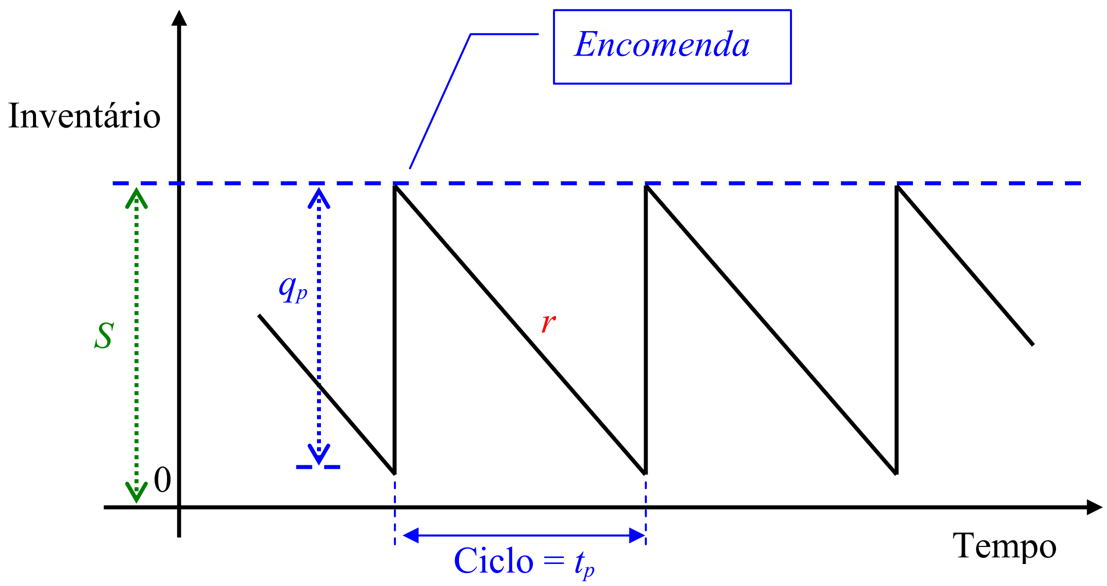
S = Nível máximo de inventário

Sistema (C_1, C_2): (1) Modelo de encomendas em atraso

"*O cliente aceita aguardar pela encomenda*"

"A encomenda fica em *carteira*, a aguardar que estejam reunidas as condições para que possa ser entregue."

$\Rightarrow$ *1º caso extremo:* $S \geq q_p$ *(não há ruptura)*



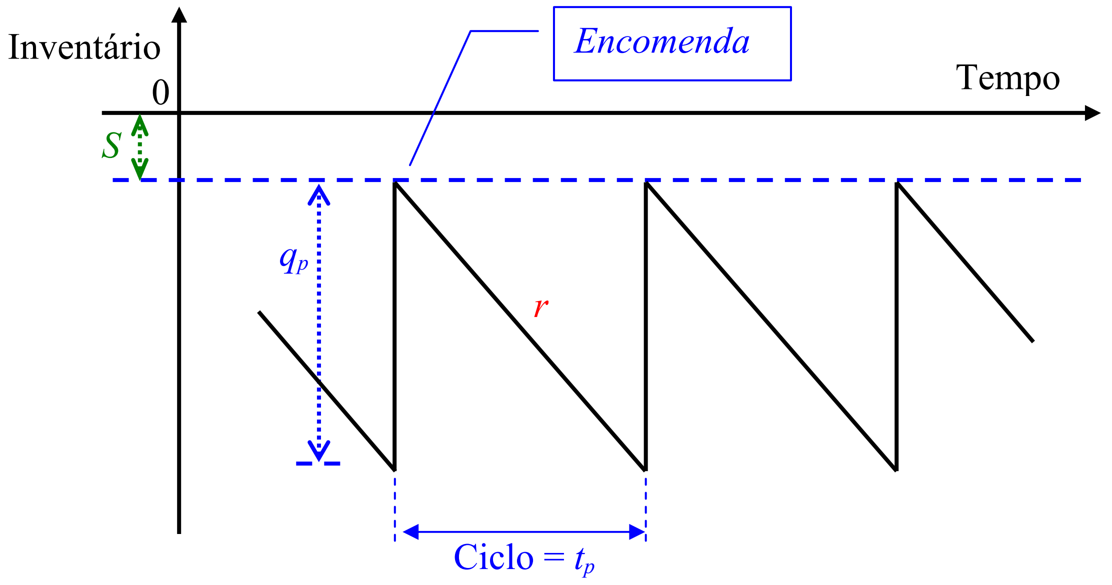
- $C_T = C_1\left[(S - q_p) + \frac{q_p}{2}\right]$

- Mínimo para $S = q_p$

- $\therefore\ C_{\min} = C_1 \frac{q_p}{2}$

Sistema (C_1, C_2): (1) Modelo de encomendas em atraso

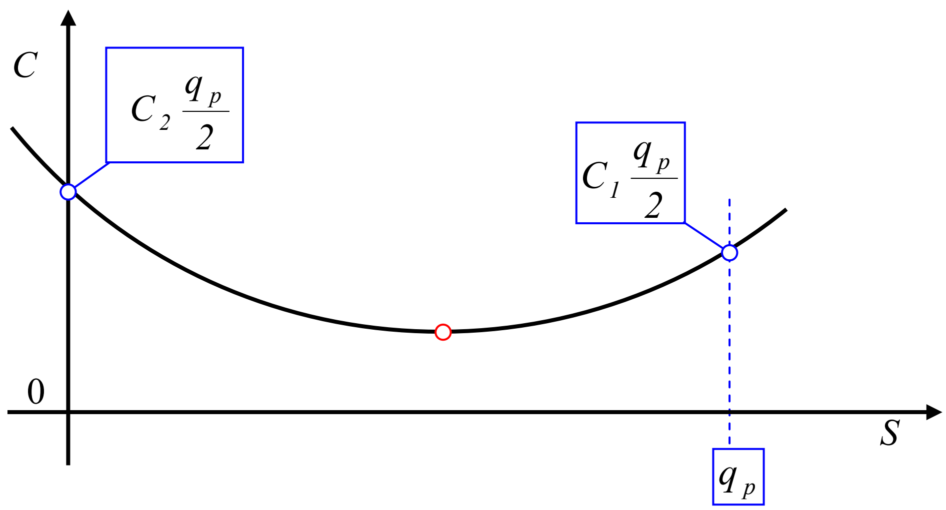
$\Rightarrow$ *2º caso extremo:* $S \leq 0$ *(não há inventário)*



$$C_T = C_2\left[S + \frac{q_p}{2}\right],\ \text{Mínimo para } S = 0,\ \therefore\ C_{\min} = C_2 \frac{q_p}{2}$$

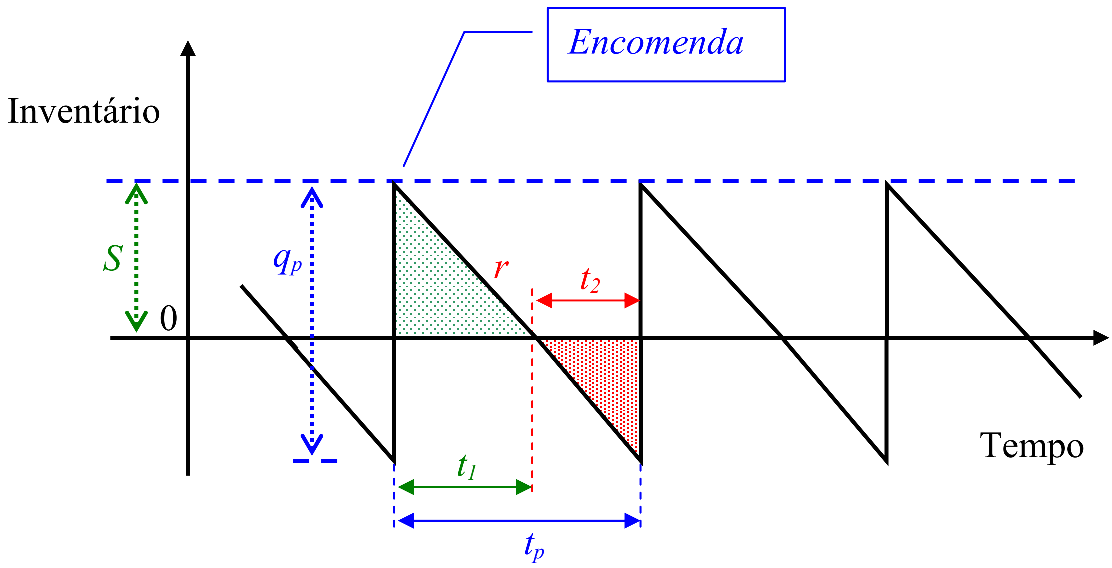
Evolução do custo:

O custo mínimo corresponde à situação em que ocorre normalmente *existência e ruptura de inventário* em cada ciclo, *i.e.* $0 \leq S \leq q_p$:



Sistema (C_1, C_2): (1) Modelo de encomendas em atraso

Nível máximo de inventário: $0 \leq S \leq q_p$



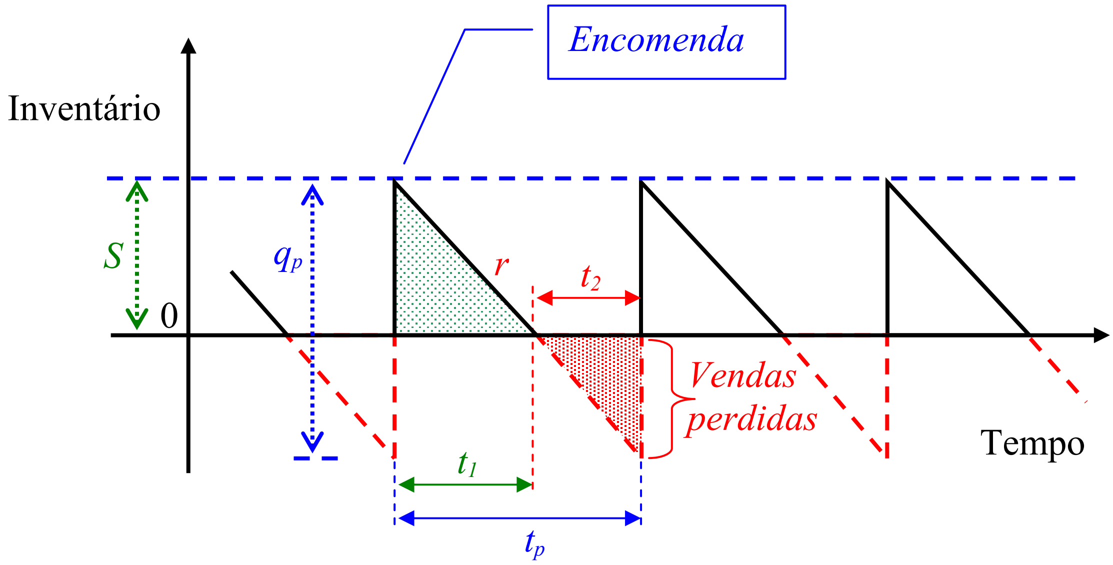
Custo total variável, $C = C_1 \dfrac{S^2}{2q_p} + C_2 \dfrac{(q_p - S)^2}{2q_p}$

- Óptimo $S^* = q_p \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$

- Óptimo $C^* = \dfrac{q_p}{2} \left(\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)$

Sistema (C_1, C_2): (2) Modelo de perda de vendas

$S \geq 0$!



Vendas perdidas num ciclo = $(q_p - S)$

Custo total variável, $C = C_1 \dfrac{S^2}{2q_p} + C_2 \dfrac{(q_p - S)}{t_p}$

- Óptimo $\quad S^* = q_p \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$
- Óptimo $\quad C^* = C_2 r - \dfrac{C_2^2 r}{2 C_1 t_p}$

Sistema misto (C_1, C_2, C_3)

"Sistema Quantidade de Encomenda / Ciclo de Encomenda"

(1) Modelo de encomendas em atraso

Custo total variável, $C = C_1 \dfrac{S^2}{2q} + C_2 \dfrac{(q-S)^2}{2q} + C_3 \dfrac{r}{q}$

Os valores óptimos obtêm-se de: $\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial S} = 0 \\ \dfrac{\partial C}{\partial q} = 0 \end{cases}$

- QEE, $q^* = \sqrt{2rC_3}\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}}$
- Máx, $S^* = \sqrt{\dfrac{2rC_3}{C_1}}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}}$
- Custo, $C^* = \sqrt{2rC_2}\sqrt{\dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_2}}$

N.B. Fazendo $C_2 \to \infty$ obtém-se o Modelo (C_1, C_3)!

Sistema (C_1, C_2, C_3): (2) Modelo de perda de vendas

Custo total variável, $$C = C_1 \frac{S^2}{2q} + C_2 \frac{(q-S)}{t} + C_3 \frac{r}{q}$$

$$(0 \leq S \leq q \text{ e } t = \frac{q}{r})$$

Fazendo $K = \frac{S}{q}$ $(0 \leq K \leq 1)$, e derivando, obtém-se:

- $q^* = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}$
- $C^* = K\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) + C_2 r$

(a) Se $\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) > 0$, *i.e.* C_2 *"pequeno"* $\left(C_2 < \sqrt{\frac{2C_1C_3}{r}}\right)$ vem $K = 0 \Rightarrow q^* = \infty$ e $S^* = 0$, então

$C^* = C_2 r$

(*<u>não deve ser mantido inventário</u>*, se $C_1, C_3 >> C_2$);

(b) Se $\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) < 0$, *i.e.* C_2 *"grande"* $\left(C_2 > \sqrt{\frac{2C_1C_3}{r}}\right)$

vem $K = 1 \Rightarrow S = q$, então $C^* = \sqrt{2rC_1C_3}$

(*<u>usar o Modelo de QEE</u>* !)

Sistemas (C_1,C_3) *e* (C_1,C_2)*: Exemplo*

Um fabricante deve fornecer a um cliente 24000 unidades por ano de um seu produto. Esta procura é conhecida e fixa.

Atendendo a que o cliente não dispõe de armazém e que as unidades do artigo são utilizadas pelo cliente numa operação de uma linha de montagem, o fabricante deve entregar diariamente o fornecimento necessário a cada dia.

O custo de existência de inventário é de 10 U.M. por unidade e por mês, e o custo de preparação da produção é de 35000 U.M. por ciclo produtivo.

a) Se o custo de quebra de inventário for considerado infinito, que quantidade de encomenda e que período devem ser utilizados? Qual o custo variável mínimo de operação?

b) Se o custo de quebra for assumido igual a 20 U.M. por artigo e por mês, calcule os mesmos parâmetros da alínea anterior, e determine o nível óptimo de inventário após reaprovisionamento.

Sistemas (C_1, C_3): Exemplo

O preço unitário de um artigo é orçamentado por um fornecedor como sendo de 17.50 U.M. para encomendas inferiores a 750 unidades, e como sendo de 1600 U.M. para encomendas superiores.

A utilização anual do artigo é de 720 unidades, e a taxa anual de existência de inventário é igual a 26% do preço de compra.

a) Se os custos de passagem de encomenda forem iguais a 500 U.M., que economia anual é possível obter pela adopção de quantidades de encomenda iguais a 750 unidades?

b) A que nível terá de descer a utilização anual para que aquela economia não se concretize?

c) Se os custos de passagem de encomenda puderem ser reduzidos para 200 U.M., que efeito se obtém nos custos totais para o nível de utilização actual?

Análise de cobertura em sistemas de multi-inventário

Objectivo:

Minimizar o capital investido em inventário para a gama completa de produtos armazenados.

Por exemplo, através do

Ajustamento da frequência de encomenda:

Frequência óptima (1 produto): $n^* = \sqrt{\dfrac{C_1 r}{2C_3}}$ (modelo *QEE*)

Sendo $C_1 = ib$ e $r = A$ = *procura anual*, vem que:

$$n^* = \sqrt{\frac{i}{2C_3}} \cdot \sqrt{Ab}$$

Supondo i e C_3 aproximadamente constantes para a gama de produtos, tira-se que:

$$\sum n^* = \sqrt{\frac{i}{2C_3}} \cdot \sum \sqrt{Ab}$$

$$\sum n^* \propto \sum \sqrt{Ab}$$

$$k = \frac{\sum \sqrt{Ab}}{\sum n} = \frac{\sqrt{Ab}}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sqrt{Ab}}{k}}$$

Análise de cobertura em sistemas de multi-inventário

Ajustamento da frequência de encomenda (exemplo)

Situação actual:

Artigo	Valor de utilização anual (Ab)	$\sqrt{Ab}$	Encomendas por ano (n)
A	4900	70	4
B	900	30	4
C	400	20	4
Σ		120	12

Valor da Encomenda ($qb = Ab/n$)	Valor médio stock ($qb/2$)
1225	612
225	113
100	50
1550	775

- Pretende-se manter um total de 12 encomendas por ano;
- $k = \dfrac{\sum\sqrt{Ab}}{\sum n} = 10$

Solução proposta através da *"Análise de Cobertura"*:

Artigo	Valor de utilização anual (Ab)	$\sqrt{Ab}$	Encomendas por ano (n)
A	4900	70	70/10 = 7
B	900	30	30/10 = 3
C	400	20	20/10 = 2
Σ		120	12

Valor da Encomenda ($qb = Ab/n$)	Valor médio stock ($qb/2$)
700	350
300	150
200	100
1200	600

- $\Rightarrow$ Redução aprox. de 22.6% no valor médio global de stock!

Limitação no valor de inventário (1)

(1) Método Aproximado (factorização simples)

- Valor médio total de inventário (condicionado): V^C

- Valor médio total (não-condicionado):

$$V^* = \sum V_j^* = \frac{b_1 q_1}{2} + \frac{b_2 q_2}{2} + \ldots + \frac{b_n q_n}{2}$$

- Se $\alpha = \frac{V^C}{V^*} < 1$

- Então: $\alpha V^* = V^C = \sum V_j^C = \frac{b_1 \alpha q_1}{2} + \frac{b_2 \alpha q_2}{2} + \ldots + \frac{b_n \alpha q_n}{2}$

- $\boxed{q_j^C = \alpha q_j^*}$

Artigo j	b_j	A_j	q_j^* (QEE)	$\frac{(q_j^* b_j)}{2}$	C_{Tj}^*	q_j^C (αq_j^*)	$\frac{(q_j^* b_j)}{2}$	C_{Tj}^C
1	3.5	1400	400	700	336	308	538	347
2	2.0	5000	1000	1000	480	769	769	496
3	1.0	2500	1000	500	240	769	385	248
4	2.0	800	400	400	192	308	308	199
Σ				2600	1248		2000	1290

- $\Rightarrow$ Aumento nos custos variáveis de operação!

Limitação no valor de inventário (2)

(2) Método dos Multiplicadores de Lagrange (optimização)

$$\min C = \sum_j i \frac{b_j q_j}{2} + \sum_j C_{3j} \frac{A_j}{q_j}$$

$$s.a. \quad \sum_j q_j b_j \le V_{\max} \quad \text{(valor total máximo de inventário)}$$

$$q_j \ge 0$$

A função de Lagrange respectiva é:

$$L = \frac{i}{2} \sum_j b_j q_j + \sum_j C_{3j} \frac{A_j}{q_j} + \lambda \left(V_{\max} - \sum_j q_j b_j \right)$$

Estacionaridade para: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{i b_j}{2} - C_{3j} \frac{A_j}{q_j^2} - \lambda b_j = 0$

e $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow V_{\max} - \sum_j q_j b_j = 0$

…obtém-se então a:

Quantidade Óptima de Encomenda = $\boxed{q_j^C = \sqrt{\frac{2 A_j C_{3j}}{b_j (i - 2\lambda)}}}$

Limitação no valor de inventário: *Exemplo 1*

- 3 produtos com taxa de juro de existência = i = 20%

- Valor máximo total de inventário = 14000 U.M.

Caso não-condicionado:

Artigo j	b_j	A_j	C_{3j}	q_j^* (QEE)	$q_j^* b_j$
1	20	1000	50	158	3160
2	100	500	75	61	6100
3	50	2000	100	200	10000
Σ					19260

N.B. Não cumpre a restrição de valor máximo, 19260>14000 UM!

$$\boxed{q_j^C = \sqrt{\frac{2A_j C_{3j}}{b_j(i-2\lambda)}}}$$

Resolvendo $V^C = \sum_j q_j^C b_j$ = 14000, tira-se que λ = -0.08977.

Caso condicionado: Custos (comparação):

Artigo j	q_j^C	$q_j^C b_j$	C_T^C		C_T^*
1	114.8	2295.5	665.1		632.5
2	44.4	4445.3	1288.2		1224.7
3	145.2	7259.1	2103.5		2000.0
Σ		14000	4056.8	>	3857.2

Qual o significado do Multiplicador de Lagrange (λ)?

No caso do exemplo anterior, é possível provar que:

$$|\lambda| \cong \frac{C^C - C^*}{\sum_j b_j q_j^*}$$

<u>Interpretação possível:</u>

O mutiplicador representa (aproximadamente) a variação no <u>Custo Variável de Operação</u> por unidade de <u>Capital Investido</u> em inventário.

Limitação no valor de inventário: *Exemplo 2*

No quadro seguinte apresentam-se os dados tidos como relevantes para uma situação de duplo inventário.

Artigo	Procura anual A_j	Custo unitário b_j	Custo de passagem de encomenda, C_{3j}
1	5000	0.5	10
2	500	5.0	10

Recorrendo à optimização condicionada com base em *Multiplicadores de Lagrange*, determine as quantidades de encomenda para cada um dos artigos que minimizem o custo variável total, cumprindo no entanto uma limitação de 400 U.M. no valor médio total de stock.

(Considere que a taxa de juro interna da empresa é de 20% ao ano.)

Limitação no número total de encomendas: *Exemplo*

Considere um sistema de inventário determinístico (C_1, C_3) de vários artigos, com prazo de entrega nulo e taxa de reaprovisionamento infinita.

a) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, deduza as expressões que lhe permitem obter o óptimo condicionado, para uma situação em que o número de passagens de encomenda é limitado a um máximo *N*.

b) Para o sistema numérico seguinte, determine as quantidades de encomenda para cada um dos artigos, se o número de passagens de encomenda estiver limitado a um máximo de 150.

Artigo j	Procura anual r_j	Custo posse anual C_{1j}	Custo de passagem de encomenda C_{3j}
1	40 mil	1.4	12
2	55 mil	1.6	12
3	30 mil	2.5	12